

Principale 2020

On considère la suite (a_n) définie sur \mathbb{N} par $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

- Justifier que pour tout entier naturel n , a_n est impair.
- Déterminer suivant les valeurs de n , le reste modulo 8 de 5^n .
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1 \pmod{8}$.

2) a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{125} \end{cases}$ alors $x \equiv 257 \pmod{1000}$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n \equiv 257 \pmod{1000}$.

c) Quels sont les trois derniers chiffres de $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.

b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1} . Montrer que d est différent de 7.

c) Trouver alors d .

1) a) si $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2 \times 5^n + 7 = 2(5^n) + 7 \Rightarrow a_n \text{ est impair}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est impair

b)

n	0	1	2
reste modulo 8 de 5^n	1	5	1

$$\text{si } n \text{ pair} \Rightarrow 5^n \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\text{si } n \text{ impair} \Rightarrow 5^n \equiv 5 \pmod{8}$$



c) si n pair

$$5^n \equiv 1[8] \Rightarrow 2 \times 5^n + 7 \equiv 2 \times 1 + 7[8]$$

$$\Rightarrow a_n \equiv 1[8]$$

si n impair

$$5^n \equiv 5[8] \Rightarrow 2 \times 5^n + 7 \equiv 17[8]$$

$$\Rightarrow a_n \equiv 1[8]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1[8]$

2) a)

$$\begin{cases} n \equiv a_0[a] \\ n \equiv b_0[b] \end{cases} \Rightarrow n \equiv c_0[c]$$

$$\begin{cases} n \equiv a_0[a] \\ n \equiv b_0[b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - c_0 \equiv a_0 - c_0[a] \\ n - c_0 \equiv b_0 - c_0[b] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - c_0 \equiv 0[a] \\ n - c_0 \equiv 0[b] \end{cases} \Rightarrow n - c_0 \equiv 0[ab] \quad (a, b) = 1$$



$$2) a) \begin{cases} n \equiv 1[8] \\ n \equiv 7[125] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - 257 \equiv 1 - 257[8] \\ n - 257 \equiv 7 - 257[125] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - 257 \equiv -256[8] \\ n - 257 \equiv -250[125] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 256 = 8 \times 32 \\ 250 = 2 \times 125 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - 257 \equiv 0[8] \\ n - 257 \equiv 0[125] \end{cases} \xrightarrow{8 \times 125 = 1000} n - 257 \equiv 0[1000]$$

$$\Rightarrow n \equiv 257[1000]$$

$$b) m \in \mathbb{N}$$

$$\text{on a) } a_n \equiv 1[8]$$

$$\cdot n \geq 3$$

$$a_n = 2 \times 5^n + 7 = 5^3 \times (2 \times 5^{n-3}) + 7$$

$$= 125(2 \times 5^{n-3}) + 7$$

$$\Rightarrow a_n \equiv 7[125]$$



$$\begin{cases} a_n \equiv 1 [8] \\ a_n \equiv 7 [127] \end{cases} \Rightarrow a_n \equiv 257 [1000]$$

c)

$$a_{2020} = 2 \times 5^{2020} + 7 \quad \text{et} \quad a_{2021} \equiv 2 \times 5^{2021} + 7$$

$$a_{2020} \equiv 257 [1000] \Rightarrow a_{2020} \times a_{2021} \equiv 257^2 [1000]$$

$$a_{2021} \equiv 257 [1000]$$

$$\rightarrow a_{2020} a_{2021} \equiv 66049 [1000]$$

$$\rightarrow a_{2020} a_{2021} \equiv 049 [1000]$$

les trois derniers chiffres de

$$(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7) \text{ sont } 049$$



3) a) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$5a_{2n} - a_{2n+1} = 5(2 \times 5^{2n} + 7) - (2 \times 5^{2n+1} + 7)$$

$$= 2 \times 5^{2n+1} + 35 - 2 \times 5^{2n+1} - 7 = 28$$

si $d = a_{2n} \wedge a_{2n+1}$

$m \in \mathbb{N}$

m	0	1	2	3	4	5	6
reste mod 7 de 5^n	1	5	4	6	2	3	1
reste mod 7 de a_n	2	3	1	5	4	6	2

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 7 \text{ ne divise pas } a_n \Rightarrow d \neq 7$

c) $d = a_{2n} \wedge a_{2n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} d | a_{2n} \\ d | a_{2n+1} \end{array} \right\} \Rightarrow d | 5a_{2n} - a_{2n+1} \Rightarrow d | 28$$

$$\Rightarrow d \in \mathcal{D}_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$a_n \text{ impair} \Rightarrow d \text{ impair} \Rightarrow d \in \{1, 7\}$$

$$d \neq 7 \Rightarrow d = 1$$

Principale 2013

1) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $29x - 13y = 6$.

a) Vérifier que (2,4) est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Soit dans \mathbb{Z} l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$.

2) Justifier que $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ et en déduire que -8 est solution de (E').

3) Soit x_0 une solution de (E').

a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}$.

b) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$ puis que $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$.

c) En déduire l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z} de l'équation (E').

d) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $(x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$.

4) Résoudre dans \mathbb{Z} le système
$$\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}, \\ (x-3)^{13} \equiv -2 \pmod{13}. \end{cases}$$

1) a) $29 \times 2 - 13 \times 4 = 6 \Rightarrow (2, 4) \text{ est une solution de (E)}$

b) $29x - 13y = 6 \Leftrightarrow 29x - 13y = 29 \times 2 - 13 \times 4$

$\Leftrightarrow 29(x-2) = 13(y-4)$

$$\left. \begin{array}{l} 13 \mid 29(x-2) \\ 13 \nmid 29 \end{array} \right\} \Rightarrow 13 \mid x-2 \text{ (Gauss)}$$

$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x-2 = 13k$

$\Rightarrow x = 13k + 2$



$$23(\cancel{13}l) = \cancel{13}(y-u) \Rightarrow y = 23l + 4$$

$\forall l \in \mathbb{Z}$

$$\leftarrow 23(13l+2) - 13(23l+4) = 23 \times 2 - 13 \times 4 = 6$$

$$\mathcal{S}_{23+23} = \left\{ (13l+2, 23l+4) ; l \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2) 2^{28} \equiv 1 [29]$$

$$\begin{cases} p \text{ premier} \\ p \text{ ne divise pas } a \end{cases} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

$$\begin{cases} 29 \text{ premier} \\ 29 \text{ ne divise pas } 2 \end{cases} \Rightarrow 2^{28} \equiv 1 [29] \text{ (Fermat)}$$

$$(-8)^{19} = [(-2)^3]^{19} [29]$$

$$\Rightarrow (-8)^{19} = -2^{57} [29]$$

$$\Rightarrow (-8)^{19} = -2 \times (2^{28})^2 [29]$$



$$\Rightarrow (-8)^{19} \equiv -2 \times 1 [29]$$

$$\Rightarrow (-8)^{19} \equiv -2 [29]$$

$\Rightarrow -8$ solution de (E')

3) a) soit x_0 une solution de (E')

on suppose que x_0 multiple de 29

$$x_0 \equiv 0 [29] \Rightarrow x_0^{19} \equiv 0 [29] \text{ absurde}$$

$$\begin{cases} 29 \text{ premier} \\ 29 \text{ ne divise pas } x_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fermat}} x_0^{29} \equiv 1 [29]$$

3) b) $x_0^{19} \equiv -2 [29]$

$$\Rightarrow (x_0^{19})^3 \equiv (-2)^3 [29]$$

$$\Rightarrow x_0^{57} \equiv -8 [29]$$



$$x_0^{57} \equiv -8 [29]$$

$$\Rightarrow x_0 \underbrace{(x_0^{28})^2}_1 \equiv -8 [29]$$

$$\Rightarrow x_0 \equiv -8 [29]$$

c) x solution de (E') $\Rightarrow x \equiv -8 [29]$

$$\Leftarrow x \equiv -8 [29] \Rightarrow x^{19} \equiv (-8)^{19} [29]$$

-8 solution de (E) $\Rightarrow (-8)^{19} \equiv -2 [29]$

$$x^{19} \equiv -2 [29] \Rightarrow x \text{ solut de } (E)$$

c) $S_2 = \{-8 + 29k, k \in \mathbb{Z}\}$



$$3) (x-3)^{19} \equiv -2[23] \Leftrightarrow x-3 \equiv -8[23]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv -5[23]$$

$$S_3 = \{-5 + 23k, k \in \mathbb{Z}\}$$

4)

$$(x-3)^{13} \equiv -2[13] \Rightarrow 13 \text{ ne divise pas } x-3$$

$$\Rightarrow (x-3)^{12} \equiv 1[13]$$

$$\begin{cases} (x-3)^{12} \equiv -2[23] \\ (x-3)^{12} \equiv -2[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \equiv -8[23] \\ x-3 \equiv -2[13] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -5[23] \\ x \equiv 1[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23p - 5 \\ x = 13q + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 23p - 5 = 13q + 1 \Leftrightarrow 23p - 13q = 6$$

$$p = 2 + 13k \text{ et } q = 4 + 23k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -5 + 23p = -5 + 23(2 + 13k)$$



$$= 53 + 377k$$

$$S_k = \{ 53 + 377k, k \in \mathbb{Z} \}$$

